一. 定义叙述 (5 points * 10)

1. 叙述里斯 (Riesz) 定理.
2. 叙述叶戈罗夫 (Egorov) 定理.
3. 给出函数 a.e. 有限和 a.e. 有界的定义.
4. 叙述 $\mathbb{R}^n$ 中集合 E 可测的 Caratheodory 条件.
5. 给出两个集合对等的定义, 并叙述 Bernstein 定理.
6. 叙述 $\mathbb{R}^n$ 中集合的孤立点, 边界点, 聚点, 内点的定义.
7. 叙述 $\mathbb{R}^n$ 中离散集, 孤立集, 稠密集, 疏朗集以及开集, 闭集的定义.
8. 给出可测函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依测度收敛, 几乎处处收敛和一致收敛的定义.
9. 分别给出集列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的上, 下极限以及实函数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的上, 下极限的定义.
10. 设 f 是定义在可测集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的实函数. 给出 f 可测和 f 连续以及一致连续的定义.

二. 判断对错 (2 points * 20)

1. 集合不能与其真子集对等.
2. 稠密集的余集一定是疏朗集.
3. 若 $A \setminus C = B \setminus C$, 则 $A = B$.
4. 全体有理系数多项式是可数集.
5. 开集一定是某一列闭集的并集.
6. 任意多个可测集的交集是可测集.
7. 外测度有限的集合一定是有界集.
8. 孤立集是至多可数集, 因此没有聚点.
9. 设映射 $\varphi : A \to B$, 则 $B \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(B))$.
10. 测度大于零的可测集中必定含有不可测的子集.
11. 几乎处处收敛的可测函数列肯定是依测度收敛的函数列.
12. 设集合 A, B 不相交, 则 $m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$.
13. 两个非空闭集如果不相交, 则两个集合之间的距离大于 0.
14. 集合的边界点要么是该集合的孤立点, 要么是该集合的聚点.
15. 若点 p 同时是集合 E, F 的聚点, 则 p 一定是 $E \cap F$ 的聚点.
16. 设集合 A, B 对等, $C \subseteq A, D \subseteq B$ 满足 $C \sim D$, 则 $A \setminus C$ 与 $B \setminus D$ 可能不对等.
17. 设 φ 是集合之间的映射, 则 $\varphi(A \cap B) = \varphi(A) \cap \varphi(B))$, $\varphi^{-1}(A \cap B) = \varphi^{-1}(A) \cap \varphi^{-1}(B)$.
18. 若 f 是可测集 E 上处处有限的函数, 若 $\forall a \in \mathbb{R}$, $E[f = a]$ 均可测, 则 f 是 E 上的可测函数.
19. 设 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 E 上的一列实函数, 令 $f(x) = \inf\{f_n(x), n = 1, 2, \cdots\}$, 则对所有的 $a \in \mathbb{R}$ 有 $E[f > a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f_n > a]$, 并且 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 可测时 f 也可测.
20. 设集列 $\{A_k\}$ 满足
$$A_k = \begin{cases} [1, 2 - \frac{1}{k+1}) & , k = 1, 3, 5, \cdots \\ [0, 1 + \frac{2}{k}) & , k = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$
则集列 $\{A_k\}$ 的下限集是 $\{1\}$, 上限集是 $[0, 2)$.

三. 举例说明 (5 points * 2)

1. 写出三个基数分别为 $a, c, 2^c$ 的集合.

2. 写出一个测度大于 0 的疏朗闭集.