§4 习题课

基本原理与结论：

1. 幂级数在收敛圆内绝对且内闭一致收敛，且和函数是解析函数

2. 在区域 D 上解析的函数 $f(z)$ 在 D 内任一点，可展成 $z-a$ 的泰勒级数.

3. m 级零点的判别法：$f(z)=(z-a)^m\varphi(z)$，$\varphi(a)\neq 0$.

4. 零点的孤立性定理与解析函数的唯一性定理.

5. 最大模原理

综合练习

1. 设 $f(z)$ 是整函数，且 $\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=\sin x$，则 $f(z)=\sin z$.

Pf. $f(z)$ 与 $\sin z$ 都是整函数，$\forall x\in\mathbb{R}$，$f(x)=\sin x$，由唯一性定理，$f(z)=\sin z$.

2. (1) 在 $\Gamma_\rho: |z|=\rho$ 上至少存在一点 $|z_0|=\rho$ 使 $|\cos z_0|>1$

Pf. $f(z)=\cos z$ 在 $|z|\leq\rho$ 上解析，由 $\cos 0=1$

$$|\cos 0|<\max_{z\in\Gamma_\rho}|\cos z| \Rightarrow \exists\, z_0\in\Gamma_\rho \text{ s.t. } |\cos z_0|>|\cos 0|=1.$$

(2) $f(z)$ 在闭区域 $\bar{D}=D+C$ 上连续，且 $\exists\, m>0$，$z_0\in D$ s.t. $|f(z_0)|<m$ 且 $\min\limits_{z\in C}|f(z)|>m$，则 $f(z)$ 在 D 内至少有一个零点.

Pf. 若 $f(z)$ 在 D 内无零点，且非常数，则 ~~f(z)~~ 由最小模原理，$\min\limits_{z\in\bar{D}}|f(z)|$ 只能在 C 上取到，于是 $\min\limits_{z\in\bar{D}}|f(z)|>\min\limits_{z\in C}|f(z)|>m$

又由 $\exists\, z_0\in D$，$m>0$ s.t. $|f(z_0)|<m$，$\min\limits_{z\in\bar{D}}|f(z)|\leq m$. 矛

3. 设 $f(z)$, $g(z)$ 在区域 D 解析，且 $\exists z_0 \in D$ s.t. $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$, $n=0,1,2,\cdots$
则在 D 上 $f(z) \equiv g(z)$.

Pf. 将 $f(z)$. $g(z)$ 分别在 z_0 的某邻域内展成泰勒级数有相同系数，则 $f(z) \equiv g(z)$, $z \in z_0$ 的某邻域.

由唯一性定理，$f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$.

4. 设 $f(z)$ 是整函数且 $\exists M,R>0$, $k \in N^+$ s.t. $|z|>R$ 时 $|f(z)| \leq M \cdot |z|^k$,
则 $f(z)$ 是一个至多 k 次幂的多项式函数.

Pf. $f(z)$ 在 $z=0$ 展成泰勒级数：$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $|z|<+\infty$

取 Γ_ρ: $|z|=\rho$ $(\rho>R)$, $|f^{(n)}(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz\right| \leq M \cdot \rho^{k-n}$

当 $n>k$ 时 令 $\rho \to +\infty$, $f^{(n)}(0)=0$, 则 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

5. 设 $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析，$f(0)=0$, $f(1)=1$, $|f(z)| \leq 1$, 则 $|f'(1)| \geq 1$.

Pf. $f(z)$ 在 $|z|<1$ 上满足 Schwartz 引理，则 $|f(z)| \leq |z|$

$f'(1) = \lim\limits_{z\to 1} \frac{f(z)-f(1)}{z-1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-f(x)}{1-x}$

当 $x \in (-1,1)$ 时有 $|f(x)| \leq |x|$, 于是 $|f'(1)| = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{|1-f(x)|}{1-x} \geq \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-|f(x)|}{1-x}$

$\geq \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1-x}{1-x} = 1.$

事实上应有 $\left|\frac{1-f(x)}{1-x}\right| \geq \frac{1-|f(x)|}{1-x} \geq \frac{1-x}{1-x} = 1.$

6. 设 C 是一条围线，$f(z)$ 在 C 所围含 ∞ 的区域 D 上解析，
在 $\bar{D} = D + C$ 上连续. 若 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$, 则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} A - f(z), & z \in D \\ A, & z \in \bar{D} \end{cases}$$

Pf. (1) $z\in D$ 时，以 z 为圆心作圆 $\Gamma_\rho: |\zeta-z|=\rho$，$\rho$ 较大使 C 含在 Γ_ρ 内.

由复围线的柯西积分公式，

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho+C^{-1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\Gamma_\rho}-\oint_{C}\right)$$

即
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-f(z)+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$
$$=-f(z)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})d\theta$$
$$=-f(z)+\lim_{\rho\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z+\rho e^{i\theta})d\theta$$
$$=-f(z)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{\rho\to\infty}f(z+\rho e^{i\theta})d\theta$$
$$=-f(z)+A.$$

(2) $z\in \overline{D}$ 时，$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho+C^{-1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=0$ （$\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}$ 在复连域上解析）.

于是
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

即
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{\rho\to\infty}f(z+\rho e^{i\theta})d\theta=A.$$