

§3 习题课

一. 重要定理

1. Cauchy 积分定理: $f(z)$ 在围线或复围线 C 所围区域 D 上解析, 在 $\bar{D}$ 上连续, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.

推论: $f(z)$ 在单连通 D 上解析, 对 D 内任意围线 C 有 $\oint_C f(z) dz = 0$

2. 原函数存在定理: $f(z)$ 在 D 上连续, 且复曲线积分 $\int_C f(z) dz$ 在 D 内与路径无关, 则一定存在原函数 $F(z)$ 使得 $F'(z) = f(z)$. 这里 $F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds + C$

3. Cauchy 积分公式: 设 $f(z)$ 在围线或复围线 C 所围区域 D 上解析, 在 $\bar{D}$ 上连续, 则 $\forall z \in D, n \in \mathbb{N}$ 有

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds$$

推论: 解析函数的任意阶导函数都存在.

解析函数由边界值决定

4. Morera 定理 (解析的充要条件)

$f(z)$ 在单连通 D 上解析 $\Leftrightarrow f(z)$ 在 D 上连续且对 D 内任意围线 C 都有 $\oint_C f(z) dz = 0$.

5. 平均值定理: $f(z)$ 在 $D: |z - z_0| \leq R$ 上解析, $\forall \rho (0 < \rho \leq R)$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta$$

6. Cauchy 积分不等式: $f(z)$ 在 $D: |z - z_0| < R$ 上解析, 记 $M(\rho) = \max_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|$

$$\text{则 } |f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n! M(\rho)}{\rho^n}, \text{ 这里 } M = \max_{z \in D} |f(z)|$$

$$\leq \frac{n! M}{\rho^n}$$

7. Liouville 定理: 有界整函数必为常数函数.

二. 课后练习

1. 设 $f(z) = u + iv$ 是整函数, 且满足 $u \leq M$, 则 $f(z)$ 是常数函数

Pf. 记 $F(z) = e^{f(z)}$ 也是整函数, 则 $|F(z)| = |e^{f(z)}| = e^u < e^M$

$F(z)$ 是整函数 $\Rightarrow f(z)$ 是整函数.
常数 常数

同理满足 $u \geq M$ ($v \leq M$ 或 $v \geq M$) 也有 $f(z)$ 是常数函数

2. 设 $f(z)$ 是整函数, 且满足 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$, 则 $f(z)$ 是至多 $n-1$ 次多项式函数.

Pf. $f(z)$ 是 $n-1$ 次多项式函数 $\Leftrightarrow f^{(n)}(z) \equiv 0$

由 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R$ s.t. $|z| > R$ 时 $|\frac{f(z)}{z^n}| < \varepsilon \cdot \frac{1}{2n!}$, ~~1/2n!~~

记 $\Gamma_\rho: |z| = \rho$ 且 Γ_ρ 内含 z_0 , 由 Cauchy 积分公式,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{z^n} \cdot \frac{z^n}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \forall z_0.$$

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \varepsilon \cdot \frac{\rho^n}{(\rho - |z_0|)^{n+1}} \cdot 2\pi \rho \cdot \frac{1}{2 \cdot n!} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{\rho - |z_0|} \right)^{n+1} \cdot \varepsilon$$

$$\text{又 } \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho}{\rho - |z_0|} \right)^{n+1} = 1, \exists R_1 > R \text{ s.t. } \rho > R_1 \text{ 时 } \left(\frac{\rho}{\rho - |z_0|} \right)^{n+1} < 2$$

综上, 当 $\rho \geq R_1$ 时 $|f^{(n)}(z_0)| < \varepsilon$

由 ε 任意性, $f^{(n)}(z_0) = 0$, 由 z_0 任意性, $f^{(n)}(z) \equiv 0$

3. 证明: $I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\sin\theta) d\theta = 2\pi$

$I_2 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\sin\theta) d\theta = \cancel{2\pi} 0.$

Pf. $I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} (\cos(\sin\theta) + i \sin(\sin\theta)) d\theta$
 $= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cdot e^{i\sin\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$
 $\xrightarrow[z=1]{z=e^{i\theta}} \int_{|z|=1} e^z \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i e^z \Big|_{z=0} = 2\pi$

即 $I_1 = 2\pi, I_2 = 0.$

4. 设 $f(z)$ 在 $D: |z| < 1$ 上解析, 且满足 $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$, 则
 $|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! e$

Pf. 记 $\Gamma_\rho: |z| = \frac{n}{n+1}$

由 Cauchy 积分公式, $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$

于是 $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{n+1} = (n+1)! \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < (n+1)! e$

5. 设 $f(z)$ 在 $D: |z| \leq R$ 上解析, 记 $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$, 则 $f(z)$ 在 D 内 $|f(z)| \leq M$.

Pf. 对 $f^{(n)}(z)$ 由 Cauchy 积分定理, 记 $\Gamma_R: |z| = R$, 不妨设 $f(z) \neq 0$

对 D 内任一点 z , $f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{f^{(n)}(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}} d\xi$

$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{d^n} \cdot 2\pi R = M^n \cdot \frac{R}{d}$, 于是 $\left|\frac{f^{(n)}(z)}{M^n}\right| \leq \left(\frac{R}{d}\right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$

即 $|f(z)| \leq M$

其中 d 表示 Γ_R 中点到边界的距离

Rem. 不要求 D 为圆域 (可以为围线所围区域)

6. 设 $f(z) = u(z) + i v(z)$ 在 $D: |z - z_0| \leq R$ 上解析, 则 $\forall n \in \mathbb{N}^+$ 和 $\rho (0 < \rho \leq R)$ 都有 $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{\rho^n \pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

Pf. 记 $\Gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$, 由 Cauchy 积分公式,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \stackrel{z = z_0 + \rho e^{i\theta}}{=} \frac{n!}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

再由 Cauchy 积分定理, $n \geq 1$ 时有

$$0 = \oint_{\Gamma_\rho} f(z) (z - z_0)^{n-1} dz \stackrel{z = z_0 + \rho e^{i\theta}}{=} \rho^n i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta$$

$$\text{即: } 0 = \frac{n!}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta$$

$$\text{取共轭有: } 0 = \frac{n!}{2\pi \rho^n} \int_0^{2\pi} \bar{f}(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

$$\text{于是两式相加有, } f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{\rho^n \pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

$$\text{同理两式相减有, } f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{\rho^n \pi} i \int_0^{2\pi} v(z_0 + \rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

7. 设 $f(z)$ 在 $D: |z - z_0| \leq R$ 上连续, 且对 $\rho (0 < \rho < R)$ 记 $\Gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$,

$$\text{都有 } \oint_{\Gamma_\rho} f(z) dz = 0, \text{ 则 } \int_{|z - z_0| = R} f(z) dz = 0.$$

Pf. $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $f(z)$ 与 $zf(z)$ 在 $|z - z_0| \leq R$ 上一致连续, 故 $\exists \delta > 0$, 当 $z_1 \in D, z_2 \in D$ 且 $|z_1 - z_2| < \delta$ 时 $|z_2 f(z_2) - z_1 f(z_1)| < \varepsilon$
 $|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$

$$\text{于是 } \left| \int_{|z - z_0| = R} f(z) dz \right| = \left| \int_{|z - z_0| = R} f(z) dz - \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz \right|$$

$$\leq \left| \int_0^{2\pi} [f(z_0 + R e^{i\theta})(z_0 + R e^{i\theta}) - f(z_0 + \rho e^{i\theta})(z_0 + \rho e^{i\theta})] d\theta \right|$$

$$+ \left| z_0 \int_0^{2\pi} [f(z_0 + R e^{i\theta}) - f(z_0 + \rho e^{i\theta})] d\theta \right| < (2\pi + 2\pi |z_0|) \varepsilon.$$

8. 设 $f(z)$ 在除 z_0 外的点解析, 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = A$, 记 C 是绕 z_0 的任意围线 (C 不经过 z_0), 则 $\oint_C f(z) dz = 2\pi i A$.

Pf. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时 $|(z - z_0) f(z) - A| < \varepsilon$.

取 $T_\rho: |z - z_0| = \rho$, ρ 很小使 T_ρ 含在 C 内.

由复围线的 Cauchy 积分定理,

$$\int_{C+T_\rho^{-1}} f(z) dz = 0 \Rightarrow \oint_C f(z) dz = \oint_{T_\rho} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{T_\rho} f(z) dz$$

当 $\rho < \delta$ 时有

$$\begin{aligned} \left| \oint_C f(z) dz - 2\pi i A \right| &= \left| \oint_{T_\rho} \left(f(z) - \frac{A}{z - z_0} \right) dz \right| \leq \left| \oint_{T_\rho} \frac{(z - z_0) f(z) - A}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi \rho = 2\pi \varepsilon \end{aligned}$$

特别地, 若 $A = 0$, 则 $\forall$ 绕 z_0 的围线 C 有 $\oint_C f(z) dz = 0$.

9. 设 $f(z)$ 在 $|z| > R$ 上解析, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = A$, 则对 $D: |z| > R$ 内任意包含 $|z| \leq R$ 的围线 C , 都有 $\oint_C f(z) dz = 2\pi i A$.

Pf. 记 $T_\rho: |z| = \rho$, ρ 很大使 T_ρ 内含 C .

由复围线的 Cauchy 积分定理,

$$\begin{aligned} \int_{C+T_\rho^{-1}} f(z) dz &= 0 \Rightarrow \oint_C f(z) dz = \oint_{T_\rho} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \oint_{T_\rho} f(z) dz \\ &= i \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\theta}) \rho e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{2\pi} A d\theta = 2\pi i A. \end{aligned}$$

10. 计算 $\int_C \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz$, 这里 C : (1) $|z-1| = \frac{1}{2}$, (2) $|z+1| = \frac{1}{2}$, (3) $|z| = 2$.

解: (1) $\int_C \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z-1} dz = 2\pi i \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z+1} \Big|_{z=1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$

(2) $\int_C \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz = \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z+1} dz = 2\pi i \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z-1} \Big|_{z=-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi i$

(3) $\int_C \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz = \oint_{|z|=2} \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 1} dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} + \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i - \frac{\sqrt{2}}{2} \pi i = 0.$