

《复变函数》测试I试题

姓名:

学号:

专业/年级

一. 填空 (共28分)

1. $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^5} dz = \underline{\hspace{2cm}};$ 2. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{2023}} dz = \underline{\hspace{2cm}};$

3. $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z^3+1} dz = \underline{\hspace{2cm}};$

4. $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}} dz = \underline{\hspace{2cm}};$

5. 若 $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ 在区域 D 内解析, 则可微函数 u 与 v 还应满足条件 $\underline{\hspace{2cm}}.$

6. 若 $f(z) = u(r, \theta) + i v(r, \theta)$ 在区域 D 内解析, 则可微函数 u 与 v 还应满足条件 $\underline{\hspace{2cm}};$

7. 已知 $f(z)$ 在区域 $0 < |z-a| < R$ 内解析, 且 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$, 则当

$0 < \rho < R$ 时, $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(z)}{z-a} dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

二. 计算题 (写出主要步骤)

(16分) 1. 已知 $f(z) = \frac{\cos z}{z^5} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n z^n$ ($0 < |z| < +\infty$), 求 C_{-1} .

2. 将 $f(z) = \frac{z^6}{1+z^5}$ 在 $|z| > 1$ 内展成罗朗级数.

三 证明题

1. 设 $f(z)$ 在 $0 < |z| < R$ 内解析非常数, 记 $M(p) = \max_{|z|=p} |f(z)|$, 证明函数 $M(p)$ 在 $(0, R)$ 上严格单调增加.

2. 设 $f(z)$ 为整函数, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^2} = A$, 证明 $f(z)$ 是幂次不超过 2 的多项式函数.

3. 设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析, 且 $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$, 证明: 对任意自然数 n , 都有 $|f^{(n)}(0)| \leq e \cdot \frac{(n+1)^2}{2n+1} \cdot n!$

4. 设 $f(z) = u(z) + i v(z)$ 在 $|z| < R$ 内解析, 则当 $n \geq 1$ 时, 有
$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{\pi p n i} \cdot \int_0^{2\pi} v(p e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (0 < p < R)$$

《复变函数》测试 I 参考答案

一 填空题 (4×7=28分)

1. $\frac{1}{12}\pi i$

2. $\frac{2\pi i}{2024!}$

3. 0

4. $2\pi i$

5. $u_x = v_y, v_x = -u_y$

6. $u_r = \frac{1}{r}v_\theta, v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$

7. A

二 计算题 (2×8=16分)

1. $f(z) = \frac{1}{z^5} (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots)^2 = \frac{1}{z^5} (1 - z^2 + \frac{1}{3}z^4 - \dots) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3}z + \dots$

$C_1 = \frac{1}{3}$

另解: $C_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{-1+1}} dz = \dots = \frac{1}{3}$

2. $f(z) = \frac{z^6}{z^5} \frac{1}{1 + \frac{1}{z^5}} = z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{5n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{5n-1}} \quad |z| > 1$

三 证明题 (4×14=56分)

1. 反证法, 若存在 $p_1 < p_2$ 使 $M(p_1) = M(p_2)$, 记 $\Gamma_{p_2}: |z|=p_2, \Gamma_{p_1}: |z|=p_1$. 则解析函数 $f(z)$ 在 Γ_{p_2} 内部一点 (该点在 Γ_{p_1} 上) 取到了最大模, 这与最大模原理矛盾, 故 $M(p)$ 在 $(0, R)$ 上严格单调增加.

2. 由 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^2} = A$ 知, 存在 $R > 0$ 及 $M > 0$, 使当 $|z| > R$ 时, $|f(z)| \leq M|z|^2$.

根据柯西积分公式. 当 $n \geq 3$ 时, 记 $\Gamma_p: |z|=p > R$

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_p} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \cdot p^2 \cdot 2\pi p = n! \cdot M \cdot \frac{p^3}{p^n}$$

当 $n \geq 3$ 时, 令 $p \rightarrow +\infty$ 知 $f^{(n)}(0) = 0$. 由于 $f(z)$ 为整函数, 由泰勒定理知 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2$. 记号.

3. 取 $\Gamma_n: |z| = \frac{n}{n+1}$, 由柯西积分公式:

$$|f^{(n)}(0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{1 - (\frac{n}{n+1})^2}{(\frac{n}{n+1})^{n+1}} \cdot 2\pi \cdot \frac{n}{n+1} < e \cdot n! \frac{(n+1)^2}{2n+1}$$

4. 当 $n \geq 1$ 时, 由柯西积分公式及柯西积分定理:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=p} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{n!}{2\pi p^n} \int_0^{2\pi} f(pe^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \dots ①$$

及 $0 = \frac{n!}{2\pi i p^n} \oint_{|z|=p} z^{n-1} f(z) dz = \frac{n!}{2\pi p^n} \int_0^{2\pi} f(pe^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta \dots ②$

②取共轭得 $0 = \frac{n!}{2\pi p^n} \int_0^{2\pi} \overline{f(pe^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta \dots ③$. 再由①-③得: $f(0) = \frac{n! i}{\pi p^n} \int_0^{2\pi} \overline{f(pe^{i\theta})} e^{i\theta} d\theta$.

《复变函数》小测II试题

姓名:

专业年级:

学号:

序号:

一、填空 (24分)

1. $f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \sin \frac{1}{z^2}$ 在 $z=0$ 的留数 $\text{Res}_{z=0} f(z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. $\text{Res}_{z=-1} \frac{z}{z^3+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\text{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z^4+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\text{Res}_{z=1} \frac{z+1}{z(z-1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 根据儒歇定理, 方程 $5z^9 - 3z^2 + 1 = 0$ 在 $|z| < 1$ 内有 个根.

6. 根据儒歇定理, 方程 $z^9 - 6z^3 + 2z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 内有 个根.

二 (10分) 已知 $f(z) = \frac{1}{z^8-1}$ 有 8 个一级极点: $a_1, a_2, \dots, a_7, a_8 = i$, 求

$$\sum_{i=1}^7 \text{Res}_{z=a_i} f(z)$$

三. 求 $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)}$ 在 $z=\infty$ 的留数: $\text{Res}_{z=\infty} f(z)$ (10分)

四. 用留数计算实积分: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2}$ (15分)



五. 求出将 $\infty, 0, 1$ 分别变为 $0, 1, \infty$ 的分式线性变换 $w=W(z)$.
(10分)

六. 求出将带形域 $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ 到单位圆 $|w| < 1$ 的保形变换, 使
(15分) $w(\frac{\pi}{2}i) = 0$, $\arg w'(\frac{\pi}{2}i) = \pi$.

七. 证明: $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$ 以 $z = \infty$ 为本性奇点.
(8分)

八. 用儒歇定理证明: n 次多项式方程 $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$
(8分) 在 z 平面上正好有 n 个根 ($a_0 \neq 0$).

《复变函数》小测 II 参考答案

一 填空 (24分) 1. 1 2. $-\frac{1}{300}$ 3. 0 4. 1 5. 9 6. 6

二 (10分) 1) $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的罗朗展式: $f(z) = \frac{1}{z^8} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^8}} = \frac{1}{z^8} (1 + \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{16}} + \dots)$

故 $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = -C_1 = 0$ $|z| > 1$

2) $\sum_{i=1}^7 \text{Res}_{z=a_i} f(z) = -[\text{Res}_{z=a_8} f(z) + \text{Res}_{z=\infty} f(z)] = -[\frac{1}{8z^7} \Big|_{z=i} + 0] = -\frac{i}{8}$

三 (10分) 解: $\text{Res}_{z=\infty} f(z) = -[\text{Res}_{z=1} f(z) + \dots + \text{Res}_{z=4} f(z)] = -[-\frac{1}{8} + \frac{2}{2} - \frac{2}{2} + \frac{4}{6}] = 0$

四 (10分) 解: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 2\pi i \text{Res}_{z=i\sqrt{2}} \frac{1}{(z^2+2)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{(z+i\sqrt{2})^2} \right)' \Big|_{z=i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$

五 (10分) 解: 根据保交比性, 所求变换 $w=w(z)$ 满足

$$\frac{w-0}{w-1} : 1 = \frac{1}{z-0} : \frac{1}{1-0}$$

解得 $w = \frac{1}{1-z}$

六 (10分) 解 1) $w_1 = e^z$ 将带形域变为上半平面, 且 $w_1(\frac{\pi i}{2}) = i$
2) $w = e^{i\alpha} \frac{w_1 - i}{w_1 + i}$ 将上半平面变为单位圆 使 $w_1 = i$ 对应 $w = 0$.

复合得, $w = e^{i\alpha} \frac{e^z - i}{e^z + i}$ 将带形域变为单位圆. 又

$$w'(z) = e^{i\alpha} \frac{e^z(e^z + i) - e^z(e^z - i)}{(e^z + i)^2} = e^{i\alpha} \frac{2e^{2z}}{(e^z + i)^2}$$

由 $w'(\frac{\pi i}{2}) = e^{i\alpha} \frac{-2}{-4} = e^{i\alpha} = 1 \Rightarrow \alpha = 0$

故 $w = -\frac{e^z - i}{e^z + i}$ 为所求.

七 (10分) 证: 易知 $g(z) = e^z$ 以 $z=\infty$ 为本性奇点, 故 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$ 不存在非 ∞ .
又 $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{z}} = 1$, 故知, $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{z+\frac{1}{z}}$ 不存在且非 ∞

八 (10分) 证 记 $f(z) = a_0 z^n$. $g(z) = a_1 z^{n+1} + \dots + a_{n-1} z^2 + a_n$
由于 $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0$, 故当 R 很大时, 在 $|z| > R$ 上, $|f(z)| > |g(z)|$
由儒歇定理: 在 $|z| < R$ 内, $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 有同样多零点: n 个
即方程 $a_0 z^n + a_1 z^{n+1} + \dots + a_{n-1} z^2 + a_n = 0$ 在 z 平面上有 n 个根.